1. مقادیر را طوری بدست آورید که ماتریس معکوس‌پذیر باشد.

**پاسخ:**

می‌دانیم که ماتریس تنها در صورتی معکوس‌پذیر است که دترمینان آن صفر باشد. پس باید در ابتدا دترمینان ماتریس را محاسبه کنیم.

با توجه به حاصل دترمینان، ماتریس به ازای همه ها به غیر از و معکوس‌پذیر است.

2. ماتریس های را درنظر بگیرید. نشان دهید . توجه داشته باشید که

.

**پاسخ:**

دترمینان را روی ستون سوم ماتریس محاسبه می‌کنیم.

4. مقادیر را به گونه‌ای تعیین کنید که ماتریس مربعی ، شود.

**پاسخ:**

برای آنکه یک ماتریس منفرد شود، باید دترمینان برابر با صفر شود.

بنابراین ماتریس به ازای منفرد خواهد بود.

5. اگر یک مثلث با راس‌های و و باشد، نشان دهید که:

**پاسخ:**

*مثلث را به مثلثی هم مساحت با یک راس در مبدا تبدیل می‌کنیم (مثلث را شیفت می‌دهیم) و*  را از تمام رئوس کم می‌کنیم. حالا این مثلث راس‌هایی برابر و  *و*  دارد. می‌دانیم مثلث مساحتی برابر مساحت متساوی‌الضلاع با ضلع‌های و دارد. پس مساحت مثلث برابر است با:

حال می‌توانیم ثابت کنیم عبارت صورت سوال، طی چند عملیات سطری و گسترش ها برای حساب کردن دترمینان برابر همین عبارت بالاست:

طبق تئوری ۵:

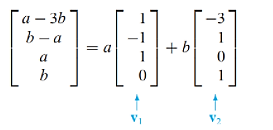
پس مساحت مثلث برابر است با:

6. فرض کنید مجموعه تمام بردارهای به فرم است که و اعداد دلخواهی می‌باشند.

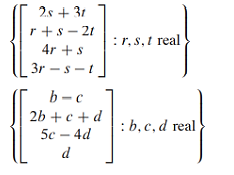
نشان دهید یک زیرفضا از است.

**پاسخ:**

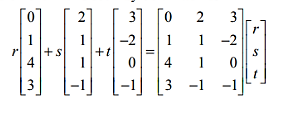
بردار های را به صورت بردارهای ستونی می‌نویسیم. در این صورت هر بردار دلخواه در به فرم زیر خواهد بود:

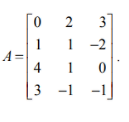


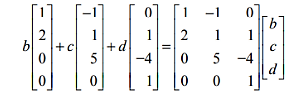
این محاسبات نشان می‌دهد که به طوریکه و بردارهایی هستند که در بالا با رنگ آبی مشخص شده‌اند. در این حالت طبق قضیه ۱ در کتاب درسی، یک زیرفضا از است.

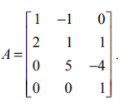
7. را بیابید به نحوی که مجموعه‌های داده شده باشند.

**پاسخ:**

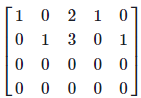
الف) هر یک از المان‌های این مجموعه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

به طوری که هر یک از می‌توانند اعداد حقیقی باشند. بنابراین، این مجموعه است به طوری که:

ب) هر یک از المان‌های این مجموعه را می‌توان به شکل زیر نوشت: 

به طوری که هر یک از می‌توانند اعداد حقیقی باشند. بنابراین، این مجموعه است به طوری که:

8. فرض کنید یک فضای برداری و یک پایه آن باشد و بردار هایی از باشند و ماتریس کاهش‌یافته است که ستون هایش هستند و به صورت زیر است:



الف) چقدر است ؟

ب)اگر آنگاه چند است ؟

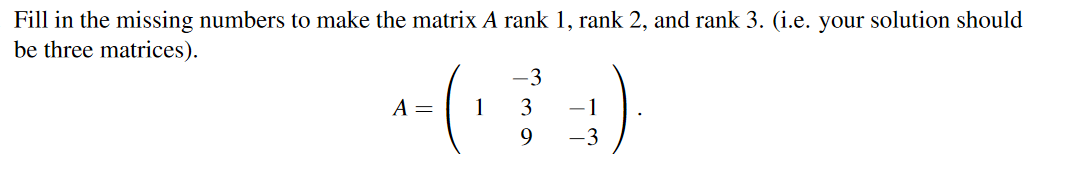
**پاسخ:**

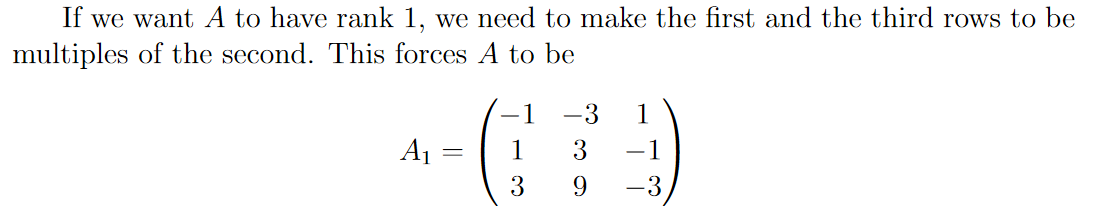
الف) اگر دقت کنیم ستون‌های این ماتریس داری 5 المان هستند یعنی هر بردار که براساس پایه نوشته شده است دارای پنج المان می‌باشد و این موضوع به ما نشان می‌دهد که پایه دارای 5 عضو است. پس .

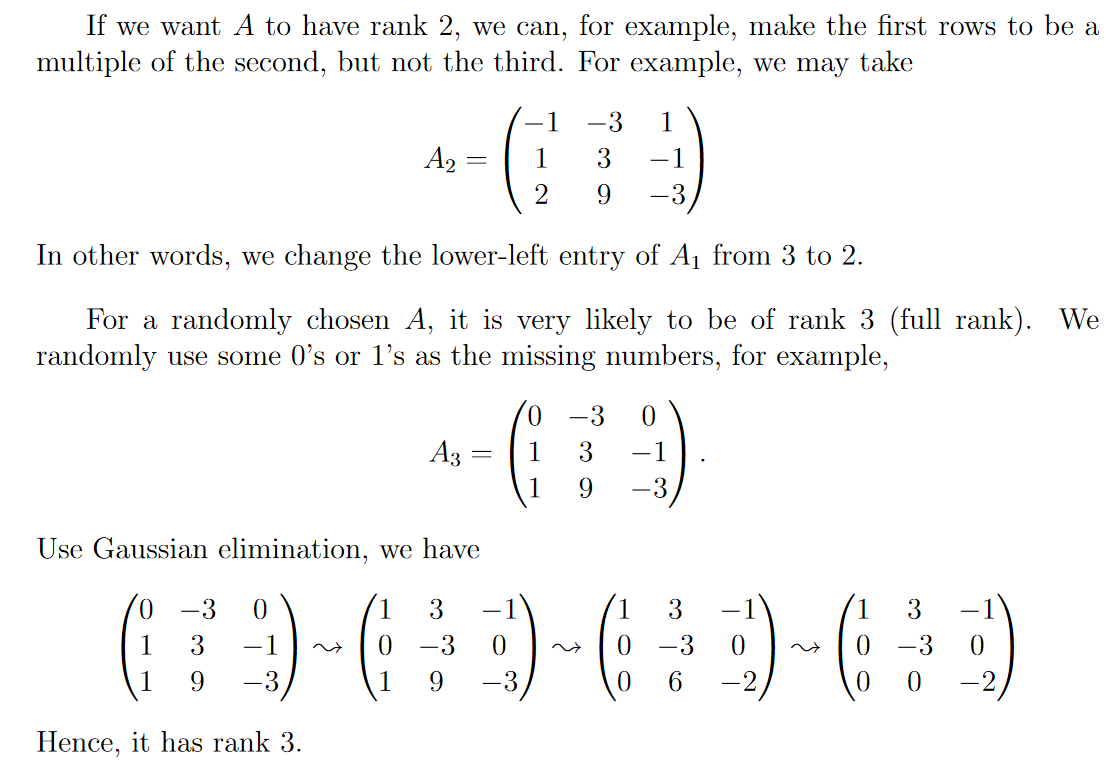
ب) همانطور که دیده می‌شود تنها ستون‌های یک و دو که نماینده بردارهای  قبل از کاهش یافتن می‌باشند دارای درایه محوری می‌باشد. پس تنها این دو بردار در بین بردارها مستقل هستند و مابقی وابسته خطی هستند. پس اگر بخواهیم برای این زیرفضا پایه بنویسیم همین 2 بردار کافیست. پس .

9. درایه‌های خالی در ماتریس را به گونه‌ای پر کنید که ماتریس به ترتیب دارای ، و باشد.

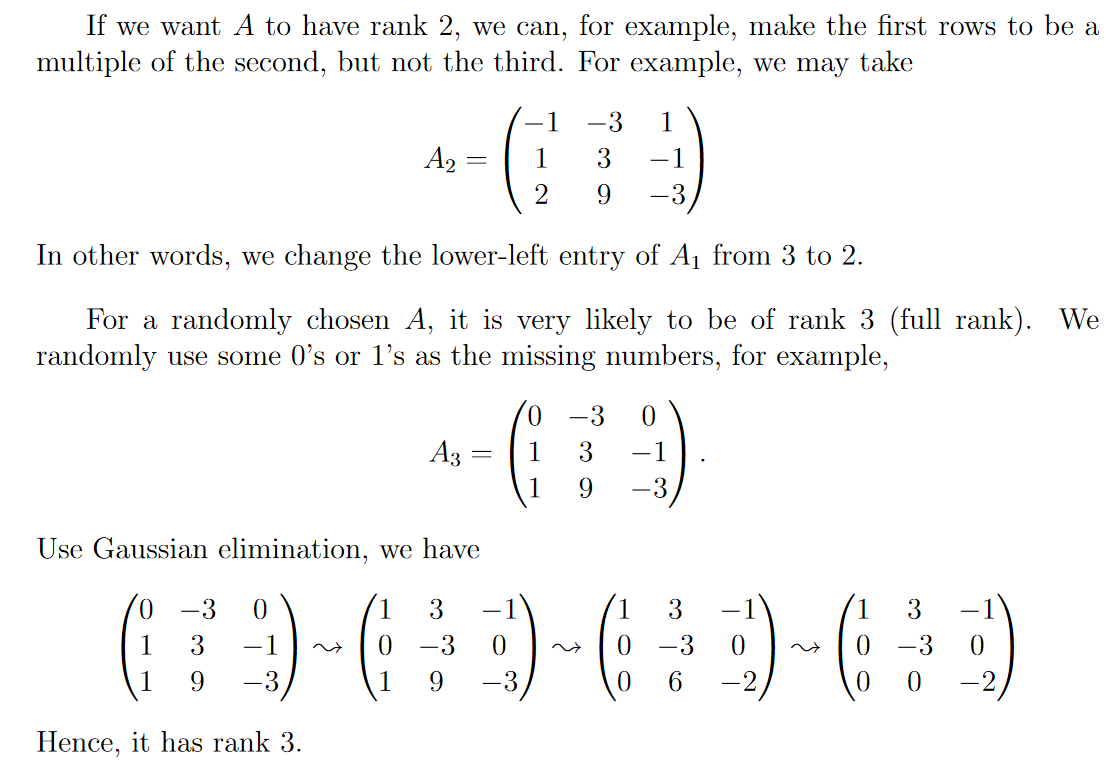
**پاسخ:**



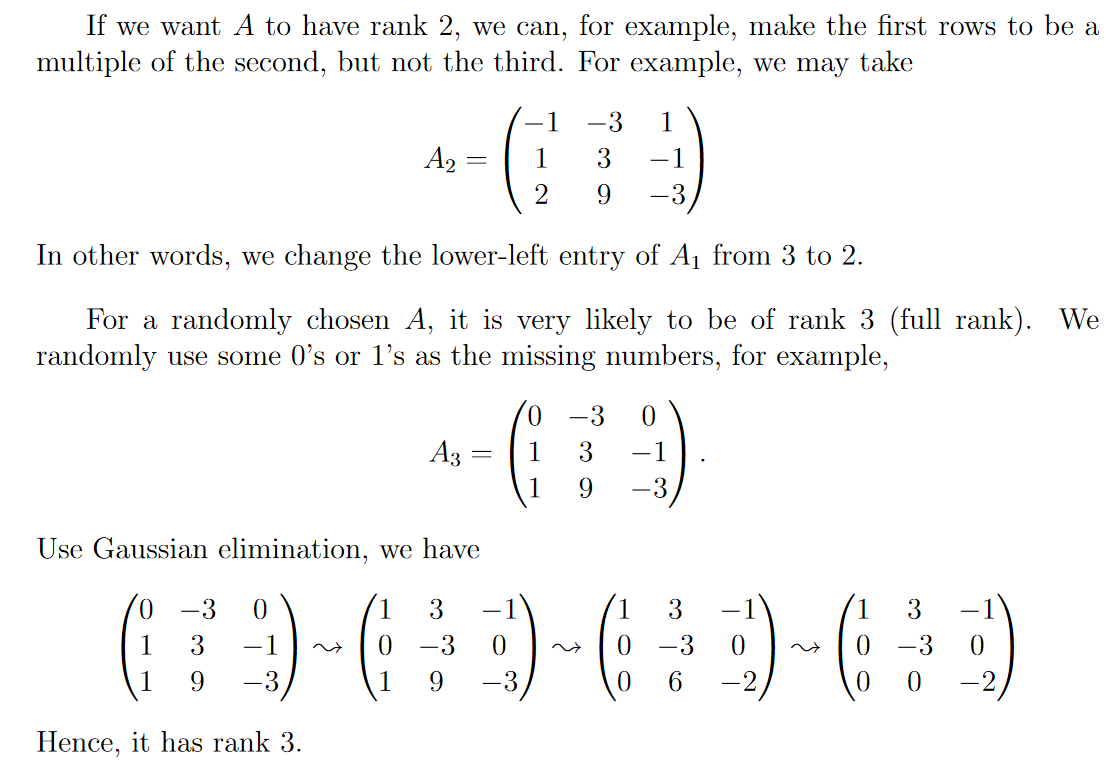
برای اینکه ماتریس دارای *باشد، باید سطر اول و سوم ضرایبی از هم باشند. بنابراین:*

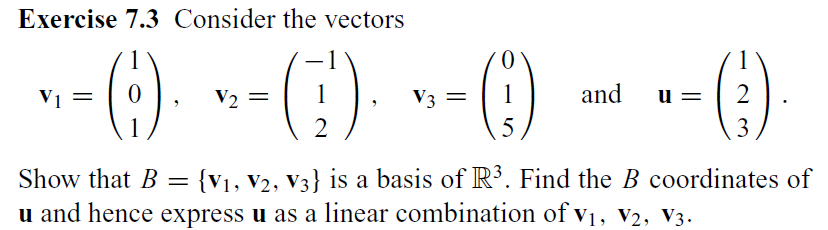
برای اینکه ماتریس دارای *باشد، باید سطر اول ضریبی از سطر دوم باشد، اما مضربی از سطر سوم نباشد. بنابراین:*

*اگر درایه‌های خالی ماتریس را به صورت تصادفی پر کنیم، به احتمال زیاد ماتریس دارای خواهد بود. بنابراین درایه‌های خالی*

 *را با 0 و 1 پر می‌کنیم:*

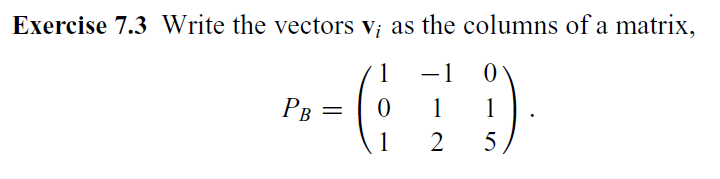
*ماتریس را به فرم نردبانی در می‌آوریم تا مطمئن شویم دارای است:*

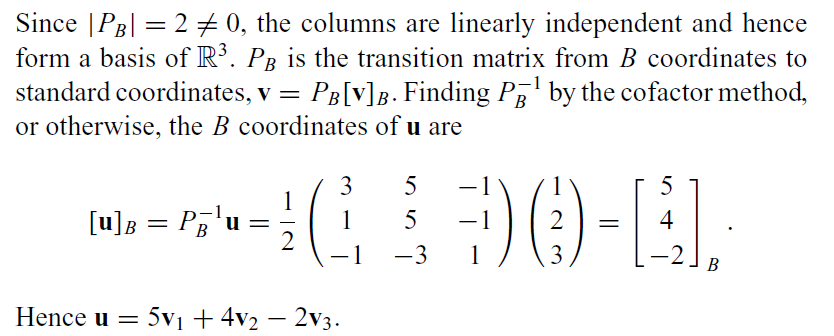


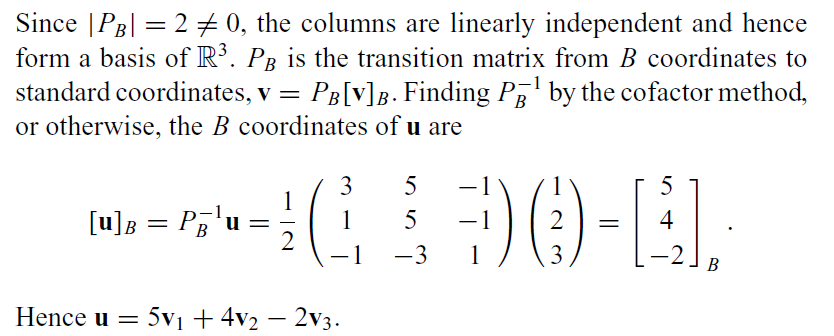
10. بردارهای زیر را در نظر بگیرید:

نشان دهید یک پایه برای است. ماتریس مختصات را برای پیدا کنید و را به صورت ترکیب خطی از بردارهای بنویسید.

**پاسخ:**

بردارهای را به عنوان ستون قرار می‌دهیم:

از آنجایی که ، بنابراین ستون‌های مستقل خطی‌اند و پایه‌ای برای محسوب می‌شوند. ماتریس انتقال از پایه‌ی به پایه‌ی استاندارد است، یعنی . بنابراین با محاسبه‌ی می‌توان ماتریس مختصات را برای بدست آورد:

در نتیجه: